
Exercice 1.

1. Soit $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire quelconque. Alors $\varphi(v,w) = \frac{1}{2}(\alpha(v,w)+\alpha(w,v))$ est bilinéaire et symétrique et $\psi(v,w) = \frac{1}{2}(\alpha(v,w)-\alpha(w,v))$ est bilinéaire et antisymétrique.
   De plus on a bien $\alpha(v,w) = \varphi(v,w)+\psi(v,w)$.
2. La matrice de Gram G d'une forme bilinéaire symétrique est une matrice symétrique (i.e. $G^t = G$). En effet, par définition de la matrice de Gram : si $v_1,...,v_n$ est une base de V et $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire, alors le coefficient de la matrice de Gram $g_{i,j} = \alpha(v_i,v_j) = \alpha(v_j,v_i) = g_{j,i}$.
   De même si α est antisymétrique, la matrice de Gram G est antisymétrique (i.e. $G^t = -G$). En effet, on a $g_{ij} = \alpha(v_i,v_j) = -\alpha(v_j,v_i) = -g_{ji}$.
3. Le raisonnement au point 2. est valable dans toute base, donc ce résultat ne dépend pas de la base choisie.

Exercice 2. (a) Supposons que $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire qui vérifie $\omega(x,x) = 0$ pour tout $x \in V$. On a alors aussi $\omega(x+y,x+y) = 0$ pour tous $x,y \in V$ et donc par bilinéarité

$$0 = \omega(x+y,x+y) = \underbrace{\omega(x,x)}_{=0} + \omega(x,y) + \omega(y,x) + \underbrace{\omega(y,y)}_{=0} = \omega(x,y)+\omega(y,x),$$

donc $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$ pour tous $x,y \in V$. On a montré que si $\omega(x,x) = 0$ pour tout $x \in V$ alors ω est antisymétrique.

Réciproquement supposons que ω est antisymétrique, alors pour tout $x \in V$ on a $\omega(x,x) = -\omega(x,x)$ (par antisymétrie), donc

$$2\,\omega(x,x) = \omega(x,x)+\omega(x,x) = 0,$$

ce qui implique que $\omega(x,x) = 0$ pour tout $x \in V$. Une forme bilinéaire est donc alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

(b) Le raisonnement en (a) est valable sur un corps quelconque, à condition que $2 \neq 0$. L'équivalence entre forme bilinéaire alternée et antisymétrique est donc vraie pour toute forme bilinéaire sur un corps K quelconque de caractéristique différente de 2.

Remarquons que si $\mathbb{K}$ est de caractéristique 2, alors $2 = 0$ dans $\mathbb{K}$ et donc $1 = -1$ et $\omega(x,y) = -\omega(x,y)$ pour tous $x,y \in V$. Sur un tel corps une forme bilinéaire est symétrique si et seulement si elle est antisymétrique (i.e. les deux notions coïncident).

Exercice 3. Montrons la première formule. Soient $u, v \in V$. Alors

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle,$$

où on a utilisé la bilinéarité dans la deuxième égalité et la symétrie dans la troisième égalité. Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) &= \frac{1}{2}\left(\langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle - \langle u,u\rangle - \langle v,v\rangle\right)\\ &= \langle u,v\rangle.\end{aligned}$$

La deuxième formule se prouve de la même façon et la troisième formule est une conséquence des deux premières.

Exercice 4. (a) On peut procéder par calcul direct ou par récurrence.

Par calcul direct :

$$\left\|\sum_{i=1}^n v_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^r nv_i, \sum_{j=1}^n v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2,$$

car

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} \|v_i\|^2 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Par récurrence sur n. Si $n=1$, il n'y a rien à montrer. Supposons maintenant $n \geq 2$. Comme v_n est orthogonal à chacun des v_i pour $1 \leq i \leq n-1$, il est aussi orthogonal à leur somme $u = v_1 + \ldots + v_{n-1}$ par linéarité du produit scalaire :

$$\langle u, v_n\rangle = \langle v_1 + \ldots + v_{n-1}, v_n\rangle = \langle v_1, v_n\rangle + \ldots + \langle v_{n-1}, v_n\rangle = 0\,,$$

et de même $\langle v_n, u\rangle = 0$ par symétrie. Alors

$$\|u+v_n\|^2 = \langle u+v_n, u+v_n\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v_n\rangle + \langle v_n,u\rangle + \langle v_n,v_n\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v_n,v_n\rangle = \|u\|^2 + \|v_n\|^2\,.$$

Mais, par hypothèse de récurrence, $\|u\|^2 = \|v_1 + \ldots + v_{n-1}\|^2 = \|v_1\|^2 + \ldots + \|v_{n-1}\|^2$. On en déduit donc

$$\|v_1 + \ldots + v_n\|^2 = \|u+v_n\|^2 = \|u\|^2 + \|v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \ldots + \|v_{n-1}\|^2 + \|v_n\|^2\,,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(b) Supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Par le théorème de Pythagore généralisé on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \|v_i\|^2 = \sum_{i=1}^r \|\lambda_i v_i\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right\|^2 = 0.$$

Donc $\lambda_i = 0$ pour tout i car chaque $\|v_i\|^2 > 0$.

Exercice 5. (a) Un quadrilatère de sommet $ABCD$ dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est un parallélogramme si et seulement si on a les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC},$$

où $\overrightarrow{AB} = (B - A)$ etc. Notons $x = \overrightarrow{AB}$ et $y = \overrightarrow{AD}$, les diagonales du parallélogramme sont alors $\overrightarrow{AC} = x + y$ et $\overrightarrow{BD} = y - x$ et le parallélogramme est un losange si et seulement si

$$\|x\| = d(A, B) = d(A, D) = \|y\|.$$

En appliquant la formule de polarisation aux vecteurs $x + y$ et $x - y$, on voit que

$$\langle x + y, x - y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|(x + y) + (x - y)\|^2 - \|(x + y) - (x - y)\|^2\right) = \|x\|^2 - \|y\|^2,$$

c'est-à-dire

$$\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \right\rangle = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2.$$

L'affirmation (a) découle immédiatement de cette propriété.

(b) On a

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = \left(\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2\right)+\left(\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2\right) = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

C'est-à-dire

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2 = 2\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right).$$

(c) Si $ABCD$ est un rectangle, alors $\langle x, y\rangle = 0$ et $\|x + y\| = \|x - y\|$ (les diagonales d'un rectangle ont même longueur). La relation précédente devient

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Exercice 6. Sur $L^2([0, \pi/2])$, on introduit le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\langle f_1, f_2\rangle \leq ||f_1||||f_2||$$

aux fonctions $f_1(x) = \sqrt{x}$ et $f_2(x) = \sqrt{\sin(x)}$. On a dans ce cas

$$||f_1||^2 = \langle f_1, f_1\rangle = \int_0^{\pi/2} x\, dx = \frac{\pi^2}{8},$$

et

$$||f_2||^2 = \langle f_2, f_2\rangle = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = 1.$$

Donc

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{x\sin(x)}dx = \langle f_1, f_2\rangle \leq \|f_1\|\|f_2\| = \sqrt{\frac{\pi^2}{8}}\cdot 1 = \frac{\pi}{\sqrt{8}}.$$

Exercice 7. (a) La condition $A\cdot A^t = \mathrm{I}_n$ entraîne que toute matrice orthogonale est inversible. Par conséquent $\mathrm{O}(n)\subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et on vérifie facilement qu'il s'agit d'un sous-groupe.

(b) On admet que si $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique, alors la matrice $(I-A)$ est inversible (on le montrera dans une prochaine série d'exercices).
On observe d'une part que $(I+A)^t = (I-A)$ et d'autre part que $(I+A)$ et $(I-A)$ commutent (car $(I+A)(I-A) = (I-A)(I+A) = I - A^2$), d'où on déduit facilement que $(I+A)$ et $(I-A)^{-1}$ commutent aussi. Donc

$$B^t = \left((I+A)(I-A)^{-1}\right)^t = \left((I-A)^{-1}(I+A)\right)^t = (I+A)^t\left((I-A)^{-1}\right)^t.$$

On rappelle aussi que pour toute matrice inversible X on a $\left(X^{-1}\right)^t = \left(X^t\right)^{-1}$, ainsi

$$B^t = (I+A)^t\left((I-A)^t\right)^{-1} = (I-A)(I+A)^{-1}.$$

Et finalement

$$B\cdot B^t = (I+A)(I-A)^{-1}\cdot(I-A)(I+A)^{-1} = I.$$

(c) Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -s \\ s & 0\end{pmatrix}$ on trouve

$$B = (I+A)(I-A)^{-1} = \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} 1-s^2 & -2s \\ 2s & 1-s^2\end{pmatrix}$$

Exercice 8. Le polynôme caractéristique de B est $\chi_B = X^4 - 8\,X^3 + 6\,X^2 + 40\,X + 25 = (X+1)^2(X-5)^2$. Le spectre est donc $\sigma(B) = \{-1, 5\}$ et les multiplicités géométrique de ces deux valeurs propres sont égales 1, donc la forme canonique de Jordan de B est la matrice

$$J[B] = J_2(5)\oplus J_2(-1) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Pour trouver une base de Jordan, on cherche alors deux vecteurs cycliques d'ordre 2, l'un pour la matrice $(B+\mathrm{I}_4)$ et l'un pour la matrice $(B-5\mathrm{I}_4)$. Concrètement cela signifie qu'on cherche $Y_2, Z_2 \in K^4$ tels que

$$\begin{aligned}
&Z_1 = (B+\mathrm{I}_4)Z_2 \neq 0,\ (B+\mathrm{I}_4)^2 Z_2 = (B+\mathrm{I}_4)Z_1 = 0\\
&Y_1 = (B-5\mathrm{I}_4)Y_2 \neq 0,\ (B-5\mathrm{I}_4)^2 Y_2 = (B-5\mathrm{I}_4)Y_1 = 0.
\end{aligned}$$

On peut prendre pour Z_2 le quatrième vecteur de base et pour Y_2 le deuxième vecteurs de bases, on a donc

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix},\ Z_1 = (B+\mathrm{I}_4)Z_2 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix},\quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix},\ Y_1 = (B-5\mathrm{I}_4)Y_2 = \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de changement de base cherchée est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \text{et on vérifie que } PJ[B] = AP.$$

Exercice 9. (a) On note $\mathcal{P}_n \subset \mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n, et $\mathcal{P}_n'$ l'espace vectoriel dual. On sait que les masses de Diracs (covecteurs d'évaluation) $\delta_{x_0}, \delta_{x_1}, \dots \delta_{x_n} \in \mathcal{P}_n^*$ sont linéairement indépendantes et forment donc une base de l'espace dual puisque $\dim(\mathcal{P}_n') = n+1$. Le covecteur d'intégration

$$\mathrm{I}_{[a,b]} : P \mapsto \int_a^b P(x)dx$$

est donc combinaison linéaire des δ_{x_j}, ce qui signifie qu'il existe $m_0, m_1, \dots m_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{I}_{[a,b]} = \sum_{k=0}^n m_k \delta_{x_k} \in \mathcal{P}_n'.$$

Cette égalité signifie que pour tout polynôme $P \in \mathcal{P}_n$ on a

$$\mathrm{I}_{[a,b]}(P) = \sum_{k=0}^n m_k \delta_{x_k}(P), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_a^b P(x)dx = \sum_{k=0}^n m_k P(x_k).$$

(b) Non, il n'y a pas de contradiction entre les exercice 9.9(a) et 8.8(d), car un polynôme de degré au plus n est complètement déterminé par $n+1$ valeurs distinctes.

Dans les deux cas on discute de la possibilité de représenter (ou non) le covecteur d'intégration comme combinaison linéaire de covecteurs d'évaluation. Mais dans le cas de l'exercice 9.9(d) on considère seulement l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n, qui est un espace vectoriel de dimension finie alors que dans l'exercice 9.9(a) on considère l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues, qui est de dimension infinie.

(c) En posant que

$$\int_0^2 P(x)dx = m_0\,P(0) + m_1\,P(1) + m_2\,P(2),$$

pour les polynômes $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$, on trouve le système d'équations linéaires suivant pour m_0, m_1 et m_2 :

$$\begin{aligned} m_0 + m_1 + m_2 &= 2, \\ 0 \cdot m_0 + m_1 + 2 \cdot m_2 &= 2, \\ 0 \cdot m_0 + m_1 + 4 \cdot m_2 &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

La solution est $m_0 = \dfrac{1}{3}$, $m_1 = \dfrac{4}{3}$ et $m_2 = \dfrac{1}{3}$.

Remarque 1. On peut aussi utiliser les formules d'interpolation de Lagrange pour déterminer les poids m_k.